Μαθημα 4ο 7/3/2018

Κλασσικη μηχανικη

Γενικευση σε τρεις διαστασεις

Η φυσικη σημασια των μεγεθων ειναι η ιδια σε ολες τις διαστασεις

Οριζουμε

ογκος	μαζα
$V = \iiint_D 1 \cdot dV$	$m = \iiint \rho \, dV$

Πρωτες ροπες και κεντρο μαζας

$M_{yz} = \iiint_D x \rho \, dV$, $M_{xz} = \iiint_D y \rho \, dV$, $M_{xy} = \iiint_D z \rho \, dV$

$\bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{m}$, $\bar{y} = \dfrac{M_{xz}}{m}$, $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{m}$ Τυποι

Ροπες αδρανειας (δευτερες ροπες)

$I_x = \iiint_D (y^2+z^2) \rho \, dV$, $I_y = \iiint_D (x^2+z^2) \rho \, dV$

$I_z = \iiint_D (x^2+y^2) \rho \, dV$, $I_L = \iiint_D r^2 \rho \, dV$

οπου r αποσταση του (x, y, z) απο την ευθεια L

Παρατηρηση

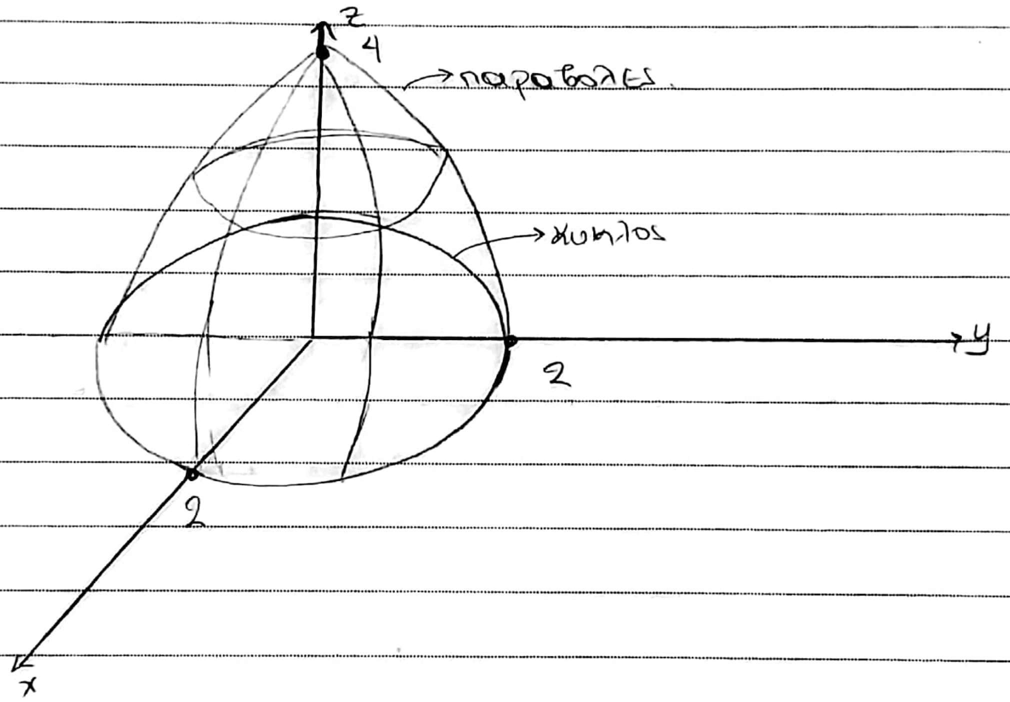
Στη περιπτωση της μιας διαστασης, δηλ για ελατηρια, νηματα, ραβδους κτ.λ σχηματα δηλ σε μια διασταση τα πολλαπλα ολοκληρωματα αντικαθιστανται απο επικαμπυλια

Τα επικαμπυλια τα υπολογιζω οπως τα μονα ολοκληρωματα αλλα πρεπει να προσεχω οτι κινουμαι σε μια καμπυλη επιπλεον (Τα πιο ευκολα)

Παραδειγμα 1

Να βρεθει το κεντροειδες στερεου που φρασσεται απο τον κυκλικο δισκο $\{x^2+y^2 \leq 4,\ z=0\}$ και το παραβολοειδες $z = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4 - z$

απαντηση



Το σχημα το σχεδιαζω ανα διασταση

Επειδη το z ακουμπαει στον αξονα αρα θελω $x=0, y=0$ και βρισκω το $z=4$

Ογκος: $V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{4-x^2-y^2} dz\, dy\, dx =$ κατω προς τα πανω

μπαινω παντα απο το επιπεδο xy

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-y^2)\, dy\, dx$$

Για ευκολια θα κανω αντικατασταση με τις κυλινδρικες

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Αρα εχω $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (4-r^2)\, r\, dr\, d\theta = \ldots = 8\pi$

Αρα θα εχω αυτη τη πυκνοτητα;

ως ασκηση: να υπολογισω το κεντροειδες $(\bar{x}, \bar{y})$

ισχυει $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = 8\pi\rho \Rightarrow \rho = m/8\pi$ και m;

παραδειγμα

κωνος + σφαιρα

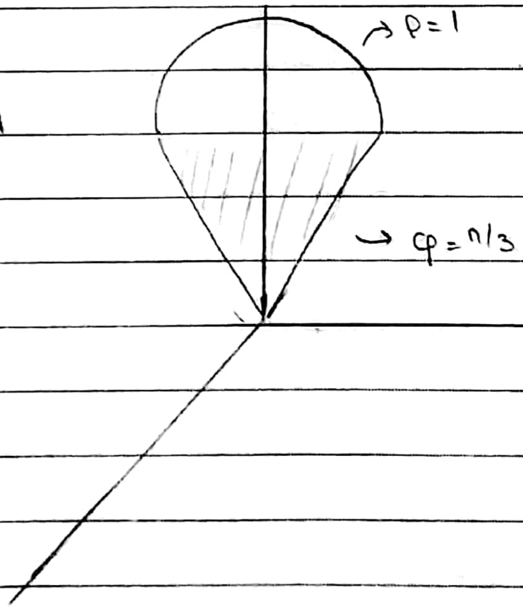
Να βρεθει το κεντρο μαζας απο ενα παγωτο χωνακι

απαντηση

Βρισκομαι παλι σε 3 διαστασεις (κωνος και σφαιρα)

Εξ σφαιρας

$x^2+y^2+z^2=1$



Θεωρούμε το χωρίο D που αποκόπτει από τη σφαίρα με ακτίνα $\rho \leq 1$ ο κώνος $\varphi = \pi/3$

Θα χρησιμοποιήσω σφαιρικές συντεταγμένες γιατί έχω γωνίες και ακτίνα

Όγκος:

βγαίνει από τον κώνο

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \underbrace{\overbrace{\rho^2 \sin\phi}^{\text{Ιακωβιανή ορίζουσα}}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}$$

$$dx\,dy\,dz = V$$

Σε καρτεσιανές (είναι το ίδιο εύκολο)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ο όγκος δίνεται ως εξής

$$V = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$$

κάτω όριο: $\varphi = \pi/3$

$$\begin{cases} x = \rho\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\ y = \rho\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ z = \rho\cdot\frac{1}{2} \end{cases}$$

άνω όριο: $\rho = 1$, $\varphi = \pi/3$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \Big\{ x^2+y^2 = \frac{3}{4}$$

όρια στο y.

- $x^2+y^2 = \frac{3}{4}\rho^2 = 3z^2 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$: κάτω όριο

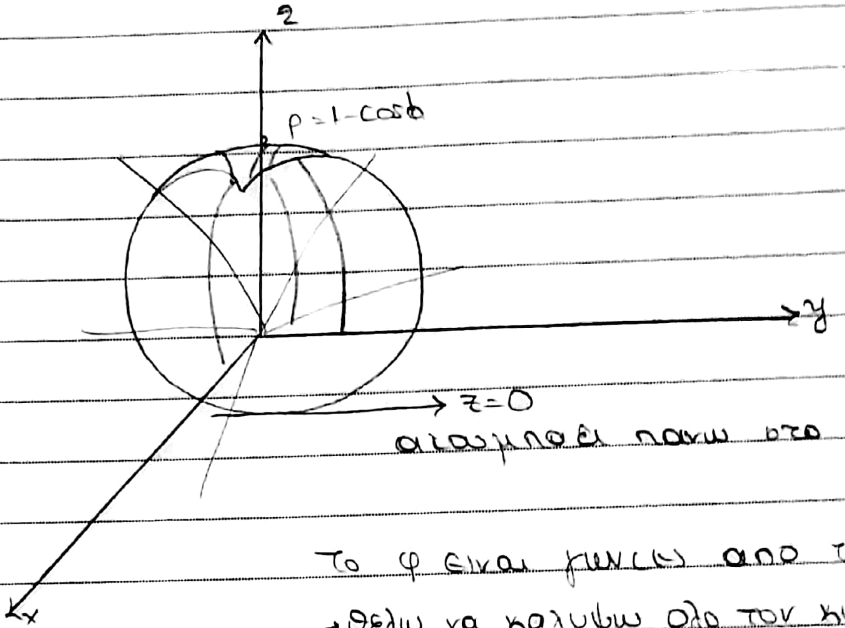
Πρέπει να ξέρω σε τι σχήμα αντιστοιχούν τα ολοκληρώματα και να κάνω τη μετατροπή σε καρτεσιανές και αντίστροφα

Παραδειγμα

Να βρεθουν οι ροπες αδρανειας μιας ντοματας

απαντηση

Θεωραμε ενα στερεο σωμα σε σφαιρικες συντεταγμενες που περικλειεται απο την επιφανεια $\rho = 1 - \cos\phi$



ακουμπαει πανω στο $z=0$

Το φ ειναι γωνια απο το z

θελω να καλυψω ολο τον κυκλο (θ)

Αν η πυκνοτητα $\rho = 1$ θελω τη μαζα

$$m = \iiint dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\phi\ (=\rho)} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

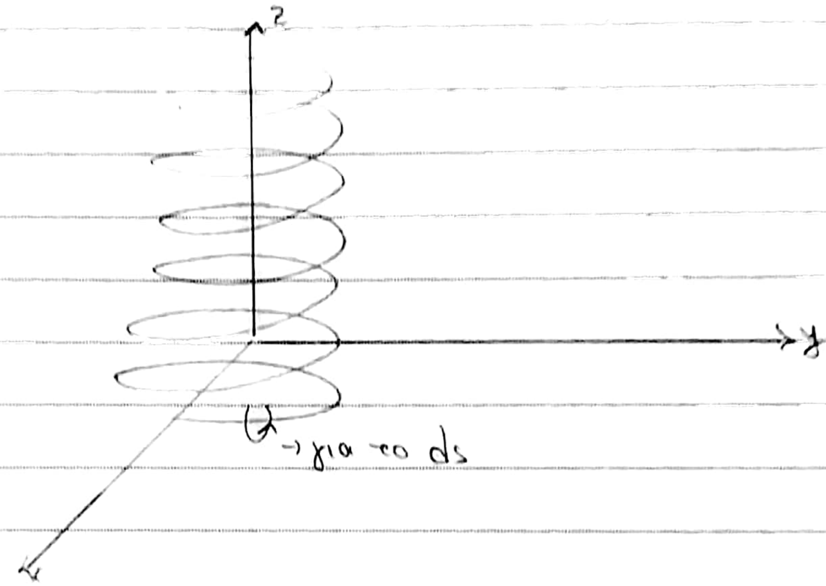
παράδειγμα

Ένα ελατήριο περιγράφεται από την ελικοειδή καμπύλη

$\vec{r} = \cos(4t)\hat{i} + \sin(4t)\hat{j} + t\hat{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

αν η πυκνότητα μάζας του είναι $\rho = 1$, να βρεθεί το κέντρο μάζας του και η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z

απάντηση



Έχουμε
$$\begin{cases} x = \cos(4t) \\ y = \sin(4t) \\ z = t \end{cases}$$

Αν ξεχάσω ότι υπάρχει το z τότε έχω κύκλους (συγκεκριμένα 4 κύκλους)

Θέλουμε τη μάζα

Έχω ελατήριο δηλ. καλώδιο μόνο άρα βρίσκομαι σε μια διάσταση και η μάζα είναι η εξής

$$m = \int_C \rho \, ds$$

Scanned by CamScanner

Πρέπει να κόψω την άπειρα σε στοιχειώδες μήκη

Στοιχειώδες μήκος ds είναι $ds = |\vec{v}|\,dt$ Διαν. Θέσης

όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα με τύπο $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

στοιχ μετατ = η μετατόπιση που κάνω αν έχω σταθ ταχ σε στοιχ χρόνο

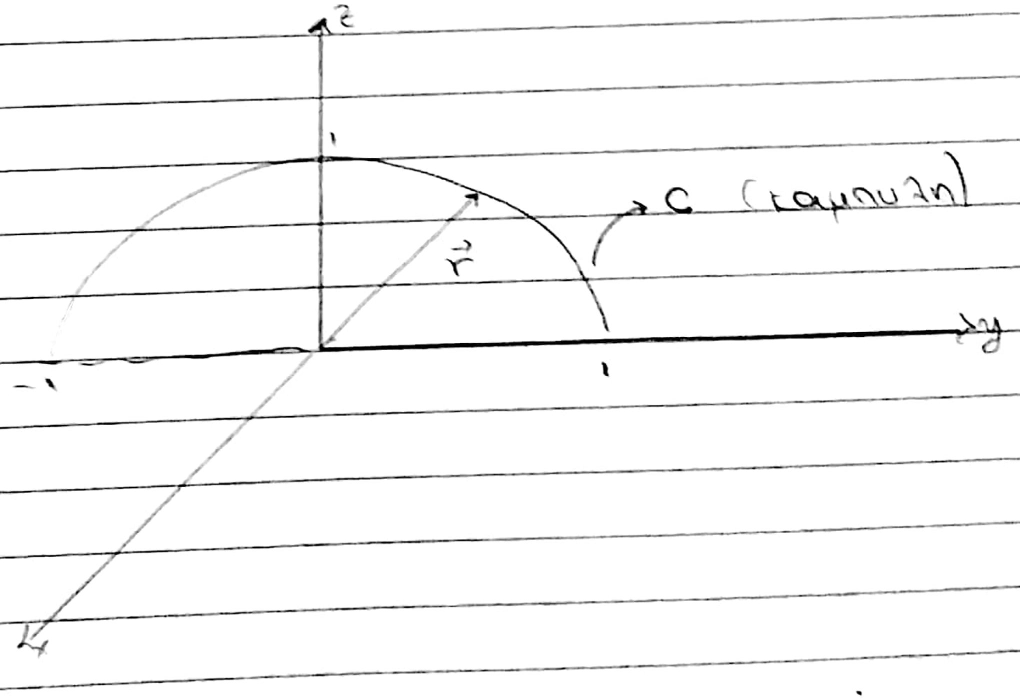
Επικαμπύλιο →

Άρα $m = \int_0^{2\pi} |\vec{v}|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 1}\;dt$

Παράδειγμα

Έστω μεταλλικό τόξο επί της καμπύλης ημικυκλίου $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ στο επίπεδο yz. Να βρεθεί το κέντρο μάζας αν η πυκνότητα είναι $\rho = 2 - z$

απάντηση



$$m = \int_C \rho \, ds = \int_C (2-z)\, ds$$

Μπορώ να βρω το διάνυσμα θέσης και έτσι θα είμαι πάλι στη περίπτωση όπως πριν

επειδή είμαι στο επίπεδο yz

$$\vec{r} = 0\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

όπου $y = \cos t$, $z = \sin t$ και $0 \leq t \leq \pi$ (επειδή βρίσκομαι σε ημικύκλιο)